

HÀM SỐ

A. Sơ lược một số tính chất.

1) Định nghĩa một hàm số.

Cú pháp: $\mathbf{> f := x \rightarrow f(x);}$

*Để tính giá trị hàm số tại $x = a$ ta dùng lệnh: $\mathbf{> f(a);}$.

Ví dụ:

Xác định hàm số $y = f(x) = x^2 - 3x + 5$.

+Nhập vào Maple:

$\mathbf{> f := x \rightarrow x^2 - 3*x + 5;}$

$$f := x \rightarrow x^2 - 3x + 5$$

+Tính giá trị của hàm số khi $x = -3; x = \frac{1}{3}; x = -\frac{2}{5}$.

$\mathbf{> f(-3), f(1/3), f(-2/5);}$

$$23, \frac{37}{9}, \frac{159}{25}$$

{Ở kết quả trên ta hiểu: $f(-3) = 23; f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{37}{9}; f\left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{159}{25}$ }.

2) Xác định hàm số f từ một biểu thức p(x).

Cú pháp: $\mathbf{> f := unapply(p, x);}$

Ví dụ:

Cho biểu thức $p(x) = \sin 3x - 2x^2$.

+ Thành lập hàm số f dựa vào biểu thức p:

$\mathbf{> p := sin(3*x) - 2*x^2;}$

$$p := \sin(3x) - 2x^2$$

$\mathbf{> f := unapply(p, x);}$

$$f := x \rightarrow \sin(3x) - 2x^2$$

+ Tính giá trị của hàm số f khi $x = \frac{\pi}{18}$:

$\mathbf{> f(Pi/18);}$

$$\frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{162}$$

3) Hàm số hợp của hàm số f và hàm số g {f(g(x))}.

Cú pháp: $\mathbf{> (f@g)(x);}$

Ví dụ:

Cho hai hàm số $y = f(x) = x^2; y = g(x) = \sqrt{2x+3}$.

+ Nhập hai hàm số trên vào Maple:

```
> f:=x->x^2;
g:=x->sqr(2*x+3);
```

$$f := x \rightarrow x^2$$

$$g := x \rightarrow \sqrt{2x+3}$$

+ Xác định hàm số hợp $h_1(x) = f(g(x))$:

```
> h1:=(f@g)(x);
```

$$h1 := 2x + 3$$

+ Xác định hàm số hợp $h_2(x) = g(f(x))$:

```
> h2:=(g@f)(x);
```

$$h2 := \sqrt{2x^2 + 3}$$

4. Hàm số $f^{(n)}(x)$ $_{\{f(f(\dots f(x))), n \text{ chữ } f\}}$.

Cú pháp : `> (f@@n)(x);`.

Ví dụ:

Cho hàm số: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Tìm các hàm số $f(f(x)); f^{(3)}(x); f^{(4)}(x)$.

+Nhập hàm số f:

```
> f:=x->x/sqr(1+x^2);
```

$$f := x \rightarrow \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

+Tìm các hàm số hợp:

- Xác định hàm số f1:= f(f(x));

```
> f1:=(f@@2)(x);
```

$$f1 := \frac{x}{\sqrt{1+x^2} \sqrt{1+\frac{x^2}{1+x^2}}}$$

Làm gọn f1 bằng các lệnh sau:

```
> simplify(sqr(denom(f1)^2));
```

```
f1:=numer(f1)/(%);
```

$$f1 := \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$$

- Xác định hàm số f2:= f(f(f(x)));

```
> f2:=(f@@3)(x);
```

$$f2 := \frac{x}{\sqrt{1+x^2} \sqrt{1+\frac{x^2}{1+x^2}} \sqrt{1+\frac{x^2}{(1+x^2)\left(1+\frac{x^2}{1+x^2}\right)}}$$

Làm gọn f2 bằng các lệnh sau:

```
> simplify(sqrt((denom(f2))^2)):
f2:=numer(f2)/(%) ;
```

$$f2 := \frac{x}{\sqrt{3x^2+1}}$$

- Xác định hàm số f3:=f⁽⁴⁾(x);

```
> f3:=(f@@4)(x):
simplify(sqrt((denom(f3))^2)):
f3:=numer(f3)/(%) ;
```

$$f3 := \frac{x}{\sqrt{4x^2+1}}$$

Qua các kết quả trên chúng ta có thể dự đoán được : $f^{(n)}(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$.

5. Hàm số cho bởi nhiều công thức.

Để xác định hàm số cho bởi nhiều công thức ta dùng thủ tục kết hợp các hàm điều kiện if... then...else .

Ví dụ 1:

$$\text{Xét hàm số } y = f(x) = \begin{cases} 2|x|-1 & \text{nếu } x \leq -2 \\ \sqrt{2x^2+1} & \text{nếu } x > -2 \end{cases}.$$

(Bài tập 29/tr159_SGK ĐS> 11_nâng cao).

+Có thể xác định hàm số trên trong Maple bằng lệnh như sau:

```
> f:=proc(x) if x<=-2 then 2*abs(x)-1 else sqrt(2*x^2+1) end
if end proc;
f:=proc(x) if x ≤ -2 then 2×abs(x) - 1 else sqrt(2×x^2 + 1) end if end proc
```

+ Từ đó có thể tính giá trị của hàm số.

Chẳng hạn tính $f(-1)$, $f\left(\frac{-5}{2}\right)$ như sau:

```
> f(-1);
```

$$\sqrt{3}$$

```
> f(-5/2);
```

$$4$$

Ví dụ 2:

Xét hàm số $y = f(x) = \begin{cases} -2(x-2) & \text{nếu } -1 \leq x < 1 \\ \sqrt{x^2-1} & \text{nếu } x \geq 1 \end{cases}$.

Tính $f(-1); f(0,5); f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right); f(1); f(2)$.

(Bài tập 10/tr46_SGK ĐS 10 nâng cao)

+ Nhập hàm số vào Maple:

```
> f:=proc(x)
if x>=-1 and x<1 then -2*(x-2) elif x>=1 then sqrt(x^2-1)
end if
end proc;
f:=proc(x)
if -1 ≤ x and x < 1 then -2×x + 4 elif 1 ≤ x then sqrt(x^2 - 1) end if
end proc
```

+ Tính các giá trị của hàm số:

```
> f(-1);
6

> f(0.5);
3.0

> a:=sqrt(2)/2:
f(evalf(a));
2.585786438

> f(1);
0

> f(2);
√3
```

•• Có thể định nghĩa chuẩn một hàm số cho bởi nhiều công thức bằng hàm ‘piecewise’ theo cú pháp sau:

```
> piecewise(cond1, f1, cond2, f2, ...);
```

Ví dụ :

Xét hàm số $y = f(x) = \begin{cases} -2(x-2) & \text{nếu } -1 \leq x < 1 \\ \sqrt{x^2-1} & \text{nếu } x \geq 1 \end{cases}$.

Tính $f(-1); f(0,5); f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right); f(1); f(2)$.

(Bài tập 10/tr46_SGK ĐS 10 nâng cao)

+ Xác định hàm số trong Maple như sau:

```
> f:=x->piecewise(x<0, 2*x, x>=0, x^2-x);
```

$$f := x \rightarrow \text{piecewise}(x < 0, 2x, 0 \leq x, x^2 - x)$$

+ Tính các giá trị của hàm số:

> **f(sqrt(2)/2);**

$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

✎ *Nhận xét:* dùng thủ tục 'piecewise' để xây dựng hàm cho bởi nhiều công thức thuận tiện và mang tính đặc trưng của một hàm số hơn so với dùng thủ tục tự tạo 'proc(x) ...if...then...'.

II. Đồ thị hàm số.

1). *Vẽ đồ thị hàm số* $y = f(x)$.

Cú pháp:

> **plot(f,x,opts);**

> **plot(f,x=x0..x1,y=y0..y1,opts);**

Trong đó:

- f: là biểu thức ẩn số x;
- options: các thuộc tính liên quan đến đồ thị;
- x0.. x1: khoảng [x0; x1] trên trục Ox;
- y0..y1: khoảng [y0..y1] trên trục Oy.

Các option liên quan đến đồ thị:

* **Color:** Màu của đồ thị gồm các màu cơ bản với các "từ khóa" như sau:

New Color Name(s)	Old Color Name(s)	RGB (0-255)
"AliceBlue"	-	[240, 248, 255]
"AntiqueWhite"	-	[250, 235, 215]
"Aqua", "Cyan"	"cyan"	[0, 255, 255]
"Aquamarine"	-	[127, 255, 212]
-	"aquamarine"	[112, 219, 147]
"Azure"	-	[240, 255, 255]
"Beige"	-	[245, 245, 220]
"Bisque"	-	[255, 228, 196]
"Black"	"black"	[0, 0, 0]
"BlanchedAlmond"	-	[255, 235, 205]
"Blue"	"blue"	[0, 0, 255]
"BlueViolet"	-	[138, 43, 226]
"Brown"	"brown"	[165, 42, 42]
"Burlywood"	-	[222, 184, 135]
"CadetBlue"	-	[95, 158, 160]
"Chartreuse"	-	[127, 255, 0]
"Chocolate"	-	[210, 105, 30]
"Coral"	-	[255, 127, 80]
-	"coral"	[255, 127, 0]
"CornflowerBlue"	-	[100, 149, 237]
"Cornsilk"	-	[255, 248, 220]
"Crimson"	-	[220, 20, 60]
"DarkBlue"	-	[0, 0, 139]
"DarkCyan"	-	[0, 139, 139]
"DarkGoldenrod"	-	[184, 134, 11]
"DarkGray", "DarkGrey"	-	[169, 169, 169]
"DarkGreen"	-	[0, 100, 0]

Khám phá Maple 11. Đỗ Cao Long. THPT Nam Đông

"DarkKhaki "	-	[189, 183, 107]
"DarkMagenta "	-	[139, 0, 139]
"DarkOliveGreen "	-	[85, 107, 47]
"DarkOrange "	-	[255, 140, 0]
"DarkOrchid "	-	[153, 50, 204]
"DarkRed "	-	[139, 0, 0]
"DarkSalmon "	-	[233, 150, 122]
"DarkSeaGreen "	-	[143, 188, 143]
"DarkSlateBlue "	-	[72, 61, 139]
"DarkSlateGray", "DarkSlateGrey"	-	[47, 79, 79]
"DarkTurquoise "	-	[0, 206, 209]
"DarkViolet "	-	[148, 0, 211]
"DeepPink "	-	[255, 20, 147]
"DeepSkyBlue "	-	[0, 191, 255]
"DimGray", "DimGrey"	-	[105, 105, 105]
"DodgerBlue "	-	[30, 144, 255]
"Feldspar "	-	[209, 146, 117]
"Firebrick "	-	[178, 34, 34]
"FloralWhite "	-	[255, 250, 240]
"ForestGreen "	-	[34, 139, 34]
"Fuchsia", "Magenta "	"magenta "	[255, 0, 255]
"Gainsboro "	-	[220, 220, 220]
"GhostWhite "	-	[248, 248, 255]
"Gold "	-	[255, 215, 0]
-	"gold "	[204, 127, 50]
"Goldenrod "	-	[218, 165, 32]
"Gray", "Grey"	-	[128, 128, 128]
"Green "	-	[0, 128, 0]
"GreenYellow "	-	[173, 255, 47]
"Honeydew "	-	[240, 255, 240]
"HotPink "	-	[255, 105, 180]
"IndianRed "	-	[205, 92, 92]
"Indigo "	-	[75, 0, 130]
"Ivory "	-	[255, 255, 240]
"Khaki "	-	[240, 230, 140]
-	"khaki "	[159, 159, 95]
"Lavender "	-	[230, 230, 250]
"LavenderBlush "	-	[255, 240, 245]
"LawnGreen "	-	[124, 252, 0]
"LemonChiffon "	-	[255, 250, 205]
"LightBlue "	-	[173, 216, 230]
"LightCoral "	-	[240, 128, 128]
"LightCyan "	-	[224, 255, 255]
"LightGoldenrod "	-	[238, 221, 130]
"LightGoldenrodYellow "	-	[250, 250, 210]
"LightGray", "LightGrey"	-	[211, 211, 211]
"LightGreen "	-	[144, 238, 144]
"LightPink "	-	[255, 182, 193]
"LightSalmon "	-	[255, 160, 122]
"LightSeaGreen "	-	[32, 178, 170]
"LightSkyBlue "	-	[135, 206, 250]
"LightSlateBlue "	-	[132, 112, 255]
"LightSlateGray", "LightSlateGrey"	-	[119, 136, 153]
"LightSteelBlue "	-	[176, 196, 222]
"LightYellow "	-	[255, 255, 224]
"Lime "	"green "	[0, 255, 0]
"LimeGreen "	-	[50, 205, 50]

Khám phá Maple 11. Đỗ Cao Long. THPT Nam Đông

"Linen"	-	[250, 240, 230]
"Maroon"	-	[128, 0, 0]
-	"maroon"	[142, 35, 107]
"MediumAquaMarine"	-	[102, 205, 170]
"MediumBlue"	-	[0, 0, 205]
"MediumOrchid"	-	[186, 85, 211]
"MediumPurple"	-	[147, 112, 219]
"MediumSeaGreen"	-	[60, 179, 113]
"MediumSlateBlue"	-	[123, 104, 238]
"MediumSpringGreen"	-	[0, 250, 154]
"MediumTurquoise"	-	[72, 209, 204]
"MediumVioletRed"	-	[199, 21, 133]
"MidnightBlue"	-	[25, 25, 112]
"MintCream"	-	[245, 255, 250]
"MistyRose"	-	[255, 228, 225]
"Moccasin"	-	[255, 228, 181]
"NavajoWhite"	-	[255, 222, 173]
"Navy", "NavyBlue"	-	[0, 0, 128]
-	"navy"	[35, 35, 142]
"OldLace"	-	[253, 245, 230]
"Olive"	-	[128, 128, 0]
"OliveDrab"	-	[107, 142, 35]
"Orange"	-	[255, 165, 0]
-	"orange"	[204, 50, 50]
"OrangeRed"	-	[255, 69, 0]
"Orchid"	-	[218, 112, 214]
"PaleGoldenrod"	-	[238, 232, 170]
"PaleGreen"	-	[152, 251, 152]
"PaleTurquoise"	-	[175, 238, 238]
"PaleVioletRed"	-	[219, 112, 147]
"PapayaWhip"	-	[255, 239, 213]
"PeachPuff"	-	[255, 218, 185]
"Peru"	-	[205, 133, 63]
"Pink"	"pink"	[255, 192, 203]
"Plum"	-	[221, 160, 221]
-	"plum"	[234, 173, 234]
"PowderBlue"	-	[176, 224, 230]
"Purple"	-	[128, 0, 128]
"Red"	"red"	[255, 0, 0]
"RosyBrown"	-	[188, 143, 143]
"RoyalBlue"	-	[65, 105, 225]
"SaddleBrown"	-	[139, 69, 19]
"Salmon"	-	[250, 128, 114]
"SandyBrown"	-	[244, 164, 96]
"SeaGreen"	-	[46, 139, 87]
"Seashell"	-	[255, 245, 238]
"Sienna"	-	[160, 82, 45]
-	"sienna"	[142, 107, 35]
"Silver"	"gray", "grey"	[192, 192, 192]
"SkyBlue"	-	[135, 206, 235]
"SlateBlue"	-	[106, 90, 205]
"SlateGray", "SlateGrey"	-	[112, 128, 144]
"Snow"	-	[255, 250, 250]
"SpringGreen"	-	[0, 255, 127]
"SteelBlue"	-	[70, 130, 180]
"Tan"	-	[210, 180, 140]
-	"tan"	[219, 147, 112]

Khám phá Maple 11. Đồ Cao Long. THPT Nam Đông

"Teal"	-	[0, 128, 128]
"Thistle"	-	[216, 191, 216]
"Tomato"	-	[255, 99, 71]
"Turquoise"	-	[64, 224, 208]
-	"turquoise"	[173, 234, 234]
"Violet"	-	[238, 130, 238]
-	"violet"	[79, 47, 79]
"VioletRed"	-	[208, 32, 144]
"Wheat"	-	[245, 222, 179]
-	"wheat"	[216, 216, 191]
"White"	"white"	[255, 255, 255]
"WhiteSmoke"	-	[245, 245, 245]
"Yellow"	"yellow"	[255, 255, 0]
"YellowGreen"	-	[154, 205, 50]

* **style (kiểu đồ thị)**: gồm 3 dạng **point** (điểm), **line** (đường thẳng), **patch**.

* **axes** (dạng hệ trục hiển thị) : gồm các dạng **boxed**, **frame**, **none**, **normal**

* **coords** (loại hệ tọa độ): gồm các dạng **bipolar**, **cardioid**, **cassinian**, **elliptic**, **hyperbolic**, **invcassinian**, **invelliptic**, **logarithmic**, **logcosh**, **maxwell**, **parabolic**, **polar**, **rose**, **tangent**.

* **numpoints = n** : số điểm hiển thị của đồ thị . Mặc định là numpoint = 50.

* **thickness**: độ dày của đồ thị. Mặc định thickness = 0 .

* **linestyle** : kiểu của đường biểu diễn đồ thị.

Gồm các dạng: **solid**, **dot**, **dash**, **dashdot**, **longdash**, **spacedash**, **spacedot** . Mặc định của Maple là kiểu solid. Chú ý, ta cũng có thể đặt giá trị của linestyle bằng các số nguyên từ 1 đến 7 . Mỗi số tương ứng với một kiểu xếp theo thứ tự trên.

* **view=[xmin..xmax, ymin..ymax]** : các khoảng giới hạn trên trục Ox và trục Oy để hiển thị đồ thị.

* **title**: tiêu đề cho đồ thị.

* tickmarks = [a,b]: giới hạn khung nhìn đồ thị.

Ví dụ:

Vẽ đồ thị hàm số $y = \sin x$.

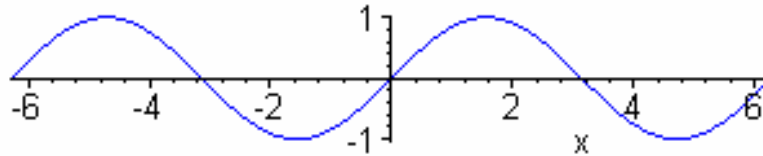
Từ đó suy ra đồ thị các hàm số: $y = -\sin x$; $y = |\sin x|$; $y = \sin |x|$

(Bài tập 11/tr17_SGK ĐS>11 nâng cao)

+ Vẽ đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên khoảng $[-2\pi; 2\pi]$:

```
> plot(sin(x), x=-2*Pi..2*Pi, title="Đồ thị hàm số y=sin(x)
tren khoang [-2Pi; 2Pi]);
```

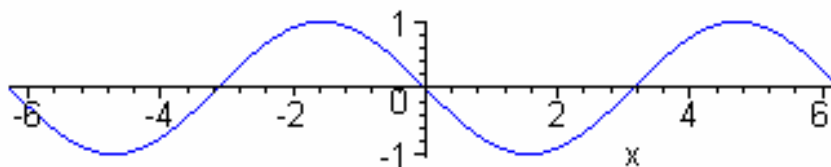

Do thi ham so $y=\sin(x)$ tren khoang $[-2\pi; 2\pi]$



+ Vẽ đồ thị hàm số $y = -\sin x$ trên khoảng $[-2\pi; 2\pi]$:

```
> plot(-sin(x), x=-2*Pi..2*Pi, title="Do thi ham so y=-sin(x)  
tren khoang [-2Pi; 2Pi]");
```

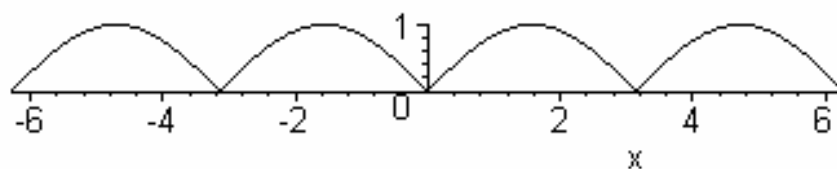
Do thi ham so $y=-\sin(x)$ tren khoang $[-2\pi; 2\pi]$



+ Vẽ đồ thị hàm số $y = |\sin x|$ trên khoảng $[-2\pi; 2\pi]$:

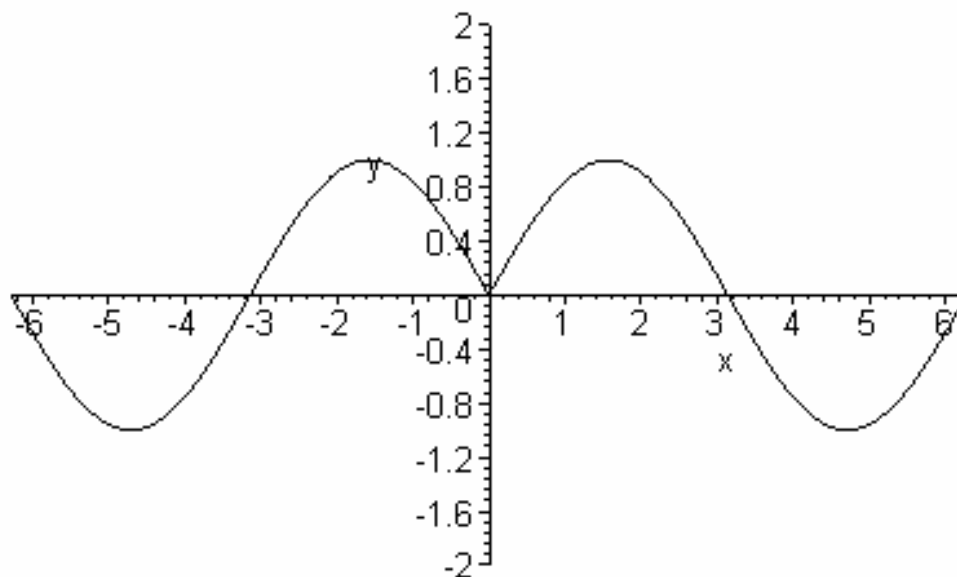
```
> plot(abs(sin(x)), x=-2*Pi..2*Pi, color=black, title="Do thi  
ham so y=|sin(x)| tren khoang [-2Pi; 2Pi]");
```

Do thi ham so $y=|\sin(x)|$ tren khoang $[-2\pi; 2\pi]$



```
> plot(sin(abs(x)), x=-2*Pi..2*Pi, y=-  
2..2, color=black, tickmarks=[10,10], title="Do thi ham so  
y=sin|x| tren khoang [-2Pi; 2Pi]);
```

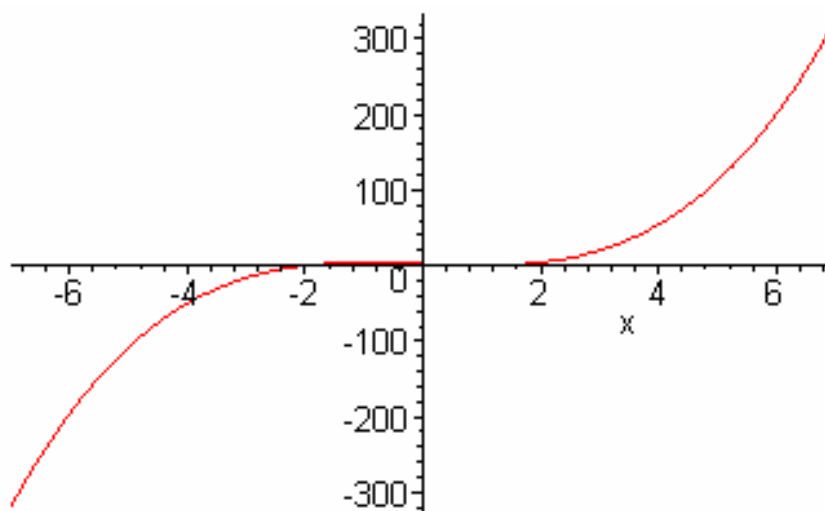
Do thi ham so $y=\sin|x|$ tren khoang $[-2\pi; 2\pi]$



Ví dụ:

Vẽ đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ trên khoảng $[-7; 7]$.

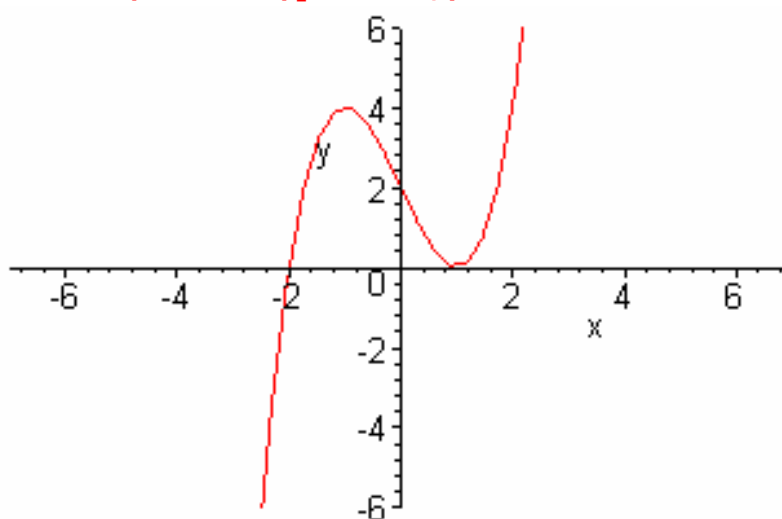
```
> plot(x^3-3*x+2, x=-7..7);
```



Nhận xét: Chúng ta nhận thấy các giá trị hiển thị trên trục Oy là quá lớn nên khó thấy rõ dáng điệu cụ thể của đồ thị.

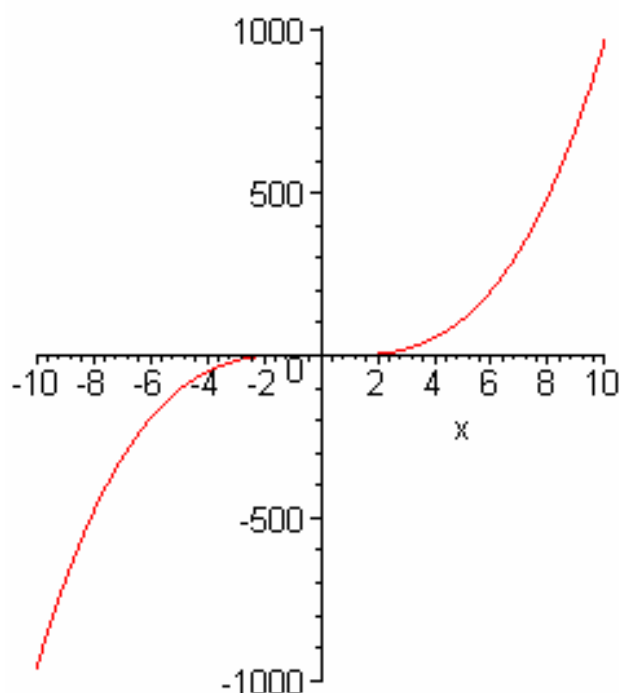
Vậy ta cần giới hạn trên trục Oy để đồ thị được rõ ràng và trực quan hơn:

> **plot(x^3-3*x+2,x=-7..7,y=-6..6);**



+Nếu không giới hạn trên 2 trục thì Maple mặc định x=-10..10 còn ý tùy ý. Do đó đồ thị được hiển thị như sau:

> **plot(x^3-3*x+2);**



☞ Qua đó chúng ta nhận thấy, để vẽ một đồ thị có tính trực quan, rõ ràng chúng ta cần phải khai báo thêm các khoảng của x và y một cách thích hợp trong câu lệnh.

* Cũng có thể vẽ một tập hợp điểm theo tham số có tọa độ dạng $[f(t), g(t)]$:

Ví dụ:

Vẽ tập hợp các điểm $M(\sin n; \cos n)$ với $n \in [0..20]$.

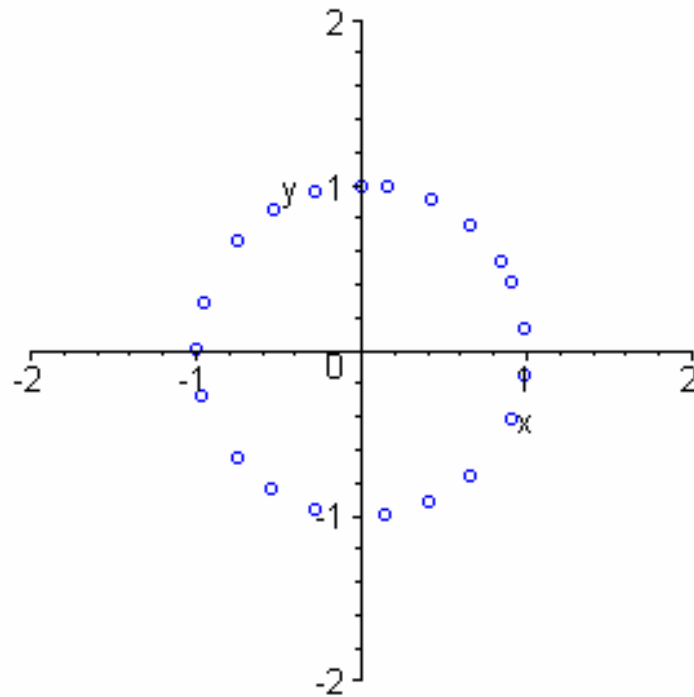
+ Xác định tập hợp điểm trong Maple:

```
> li := [[sin(n), cos(n)] $n=0..20];
li := [[0, 1], [sin(1), cos(1)], [sin(2), cos(2)], [sin(3), cos(3)], [sin(4), cos(4)],
[sin(5), cos(5)], [sin(6), cos(6)], [sin(7), cos(7)], [sin(8), cos(8)],
[sin(9), cos(9)], [sin(10), cos(10)], [sin(11), cos(11)], [sin(12), cos(12)],
[sin(13), cos(13)], [sin(14), cos(14)], [sin(15), cos(15)], [sin(16), cos(16)],
[sin(17), cos(17)], [sin(18), cos(18)], [sin(19), cos(19)], [sin(20), cos(20)]]
```

+ Vẽ tập hợp các điểm trên:

(Các điểm được hiển thị ở dạng hình tròn, màu xanh)

```
> plot(li, x=-2..2, y=-2..2, style=point, symbol=circle,
color=blue);
```



- Sau đây chúng ta cùng xem một đồ thị rất đặc biệt có hình một chiếc lá được vẽ trong hệ tọa độ cực (**coords=polar**). Đó là đồ thị hàm số:

$$r(t) = \frac{100 \left(2 - \sin 7t - \frac{1}{2} \cos 30t \right)}{100 + \left(t - \frac{\pi}{2} \right)^8}$$

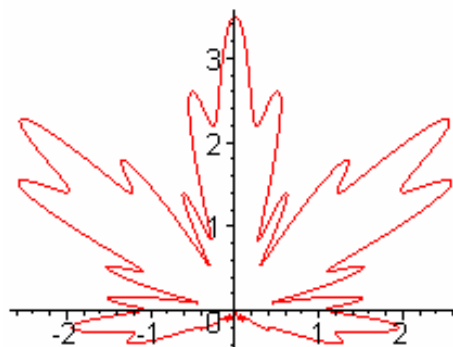
+ Xác định hàm số:

```
> s := t->100/(100+(t-Pi/2)^8):
```

```
r := t -> s(t)*(2-sin(7*t)-cos(30*t)/2):
```

+ Vẽ đồ thị hàm số r(t):

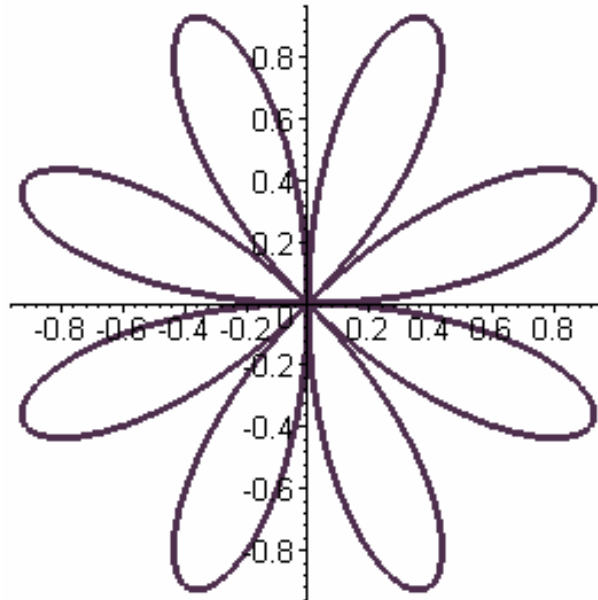
```
> plot([r(t),t,t=-Pi/2..3/2*Pi],
numpoints=2000,coords=polar,axes=normal);
```



>

*Vẽ đồ thị hàm số $y = \sin 4x$ (hình hoa tám cánh) trong hệ tọa độ cực:

```
> plot([sin(4*x), x, x=0..2*Pi], coords=polar, thickness=3, color=violet);
```



• **Vẽ nhiều đồ thị trên cùng một hệ trục.**

Chẳng hạn muốn vẽ đồ thị các hàm số f , g , h trên cùng một hệ trục.

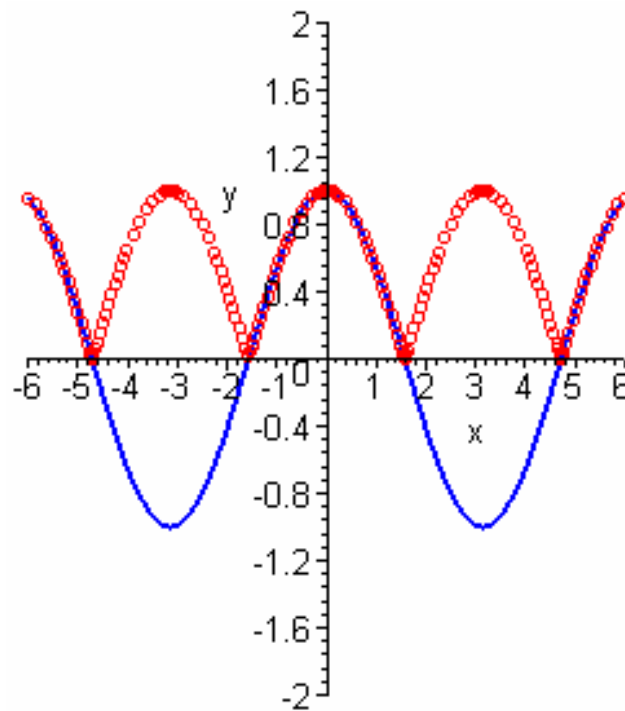
Cú pháp:

```
> plot([f,g,h], x=x1..x2, y=y1..y2, [optf, optg, opth]);.
```

Ví dụ:

Vẽ đồ thị hàm số $y = \cos x$ (màu xanh_kiểu hiển thị là đường có độ dày là 2) và đồ thị hàm số $y = |\cos x|$ (màu đỏ_kiểu hiển thị là điểm dạng hình tròn) trên cùng một hệ trục.

```
> plot([cos(x), abs(cos(x))], x=-6..6, y=-2..2, color=[blue, red], style=[line, point], symbol=circle, thickness=2, tickmarks=[10, 10]);
```



• **Vẽ đồ thị hàm số cho bởi nhiều công thức:**

Ví dụ: (Bài tập 36a/tr60 _ĐS 10 nâng cao)

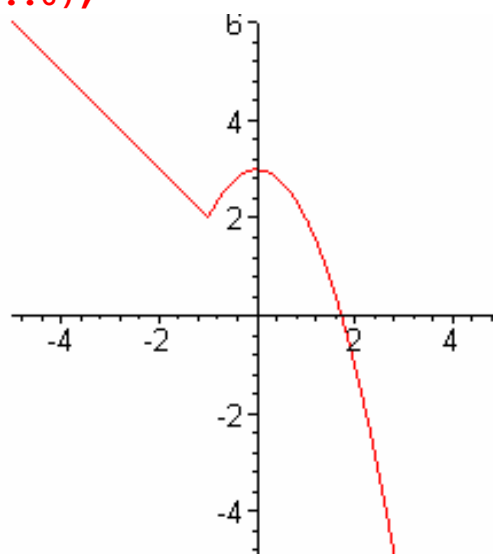
Vẽ đồ thị hàm số $y = \begin{cases} -x+1 & \text{nếu } x \leq -1 \\ -x^2+3 & \text{nếu } x > -1 \end{cases}$.

+ Lập thủ tục xác định hàm số f:

> **f:=proc(x) if x<=-1 then -x+1 else -x^2+3 end if end proc:**

+ Vẽ đồ thị hàm số f:

> **plot(f,-5..5,-5..6);**



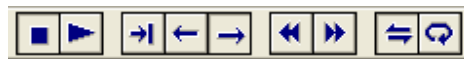
2). Vẽ đồ thị động.


Gói lệnh: `> with(plots):`


a) Đồ thị hàm số có chứa tham số $y = f(x, m)$.


Cú pháp: `> animate(plot, [f(x,m), x=a..b], m=m1..m2, option);`


Sau khi nhấn enter, xuất hiện một thanh công cụ trên màn hình có hình dạng:



+Chúng ta nhấn nút play () để xem sự biến đổi của đồ thị.

+Muốn dừng lại ở giai đoạn nào ta chỉ cần nhấn nút stop ()

+Để lặp lại sự chuyển động của đồ thị ta kích hoạt nút  trước khi nhấn nút play.

+Còn để xem sự chuyển động một lần ta nhấn nút  trong khi kích hoạt play hoặc sau khi play.

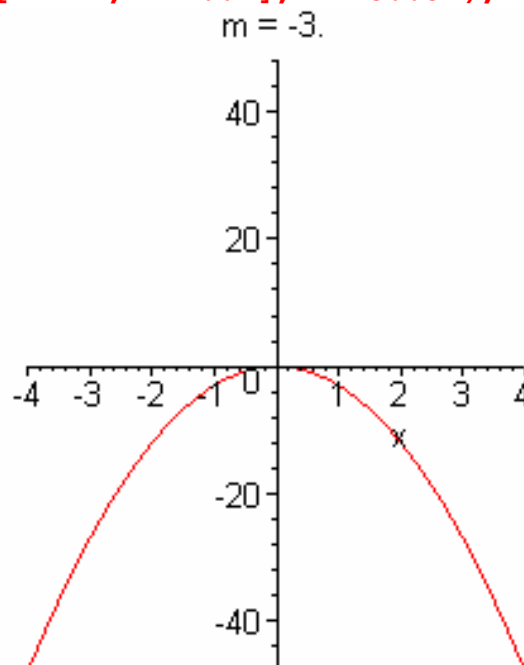
Ví dụ:

Khảo sát sự biến đổi đồ thị của họ đồ thị hàm số: $y = mx^2$.


+ Nhập vào Maple:

`> with(plots):`

`animate(plot, [m*x^2, x=-4..4], m=-3..3);`

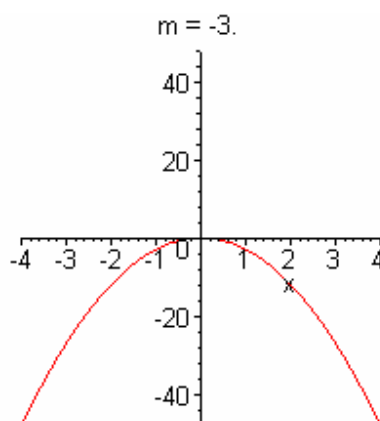



Trong câu lệnh trên ta cho $m \in [-3; 3]$. Và đồ thị đầu tiên xuất hiện trên màn hình ứng với $m = -3$.

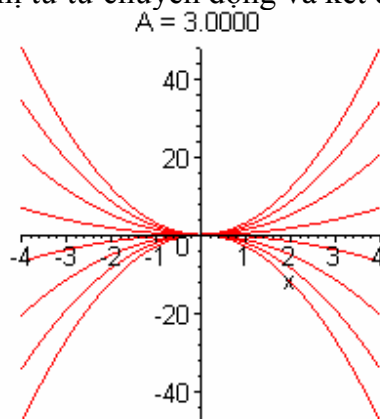
➤ Nếu muốn xem đồ thị tương ứng với từng giá trị cụ thể của m ta nhấn nút **stop** rồi kích hoạt nút , mỗi lần kích hoạt ta được một đồ thị ứng với một giá trị của m hiện ở trên màn hình (khung nhìn).

+ Có thể biểu diễn kết quả hiển thị các đồ thị dưới dạng *chùm* bằng cách bổ sung thêm trong câu lệnh một option có tên **trace = n** ($n+1$ là số đồ thị trong chùm).

> **animate(plot, [m*x^2, x=-4..4], m=-3..3, trace=7, frames=50);**



Sau khi nhấn nút , đồ thị từ từ chuyển động và kết quả sẽ hiển thị là:



b) Vẽ đồ thị $y = f(x)$ dưới dạng vết của một điểm $M(x; f(x))$ chuyển động.


Cú pháp: > **animatecurve(f(x), x=a..b, option);** .

Ví dụ:

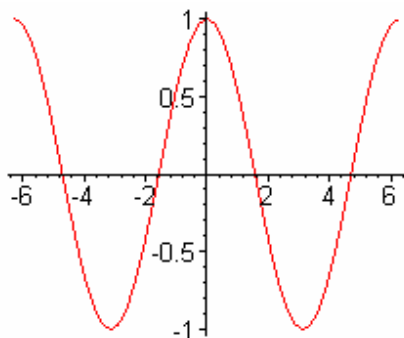
Vẽ đồ thị hàm số $y = \cos 2x$ với $x \in [-2\pi; 2\pi]$.

> **with(plots):**

animatecurve(cos(x), x=-2*Pi..2*Pi, frames=50);

+ Sau khi nhấn Enter, click ở khung đồ thị rồi nhấn nút  để xem sự chuyển động của điểm tạo nên đồ thị.

+Kết quả :



Ghi chú: Ở câu lệnh trên ta có khai báo **frames=50** để hiển thị “số khung nhìn” trong quá trình chuyển động của điểm. Số **frames** càng lớn ta càng thấy được sự dịch chuyển “mịn”_sự chuyển động chậm của điểm M.

III. Một số điểm và đường đặc biệt có liên quan đến hàm số và đồ thị hàm số.

Gợi lệnh : `> with(Student[Calculus1]):`

1) Tìm điểm cực trị của hàm số.

Cú pháp: `> ExtremePoints(f,x,opts);`
`> ExtremePoints(f,x=a..b,opts);`
`> ExtremePoints(f,a..b,opts);`

Trong đó: - f: là hàm số biến số x;
- a..b: là khoảng chứa điểm cực trị ;
- opts: là numeric. Nếu có khai báo numeric (**true**) thì [a..b]=[-10..10], nếu không khai báo maple mặc định là **false**.

Ví dụ: Tìm các điểm cực trị của hàm số $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2x - 1$.

```
> with(Student[Calculus1]):  
f:=x^3-4*x^2+2*x+1;  
`Cac diem cuc tri cua ham so:`;ExtremePoints( f,x );  
f:=x3-4x2+2x+1
```

Cac diem cuc tri cua ham so:

$$\left[\frac{4}{3} - \frac{\sqrt{10}}{3}, \frac{4}{3} + \frac{\sqrt{10}}{3} \right]$$

2) Tìm điểm tới hạn của hàm số.

Cú pháp: `> CriticalPoints(f,x,opts);`
`> CriticalPoints(f,x=a..b,opts);`
`> CriticalPoints(f,a..b,opts);`

Trong đó: - f: là hàm số biến số x;
- a..b: là khoảng chứa điểm tới hạn;

- opts: là numeric. Nếu có khai báo numeric (**true**) thì [a..b]=[-10..10], nếu không khai báo maple mặc định là **false**.

Ví dụ: Tìm các điểm tới hạn của hàm số $y = f(x) = x + \frac{1}{x-1}$ trên tập xác định của nó.

```
> with(Student[Calculus1]):  
f:=x+1/(x-1);  
`Cac diem toi han cua ham so:`;CriticalPoints( f,x );
```

$$f := x + \frac{1}{x-1}$$

Cac diem toi han cua ham so:

$$[0, 1, 2]$$

Ví dụ: Tìm các điểm tới hạn của hàm số $y = \frac{x+1}{x^2-x}$ trên tập xác định của nó.

```
> with(Student[Calculus1]):  
f:=(x+1)/(x^2-x);  
`Cac diem toi han cua ham so:`;  
CriticalPoints( f,x );
```

$$f := \frac{x+1}{x^2-x}$$

Cac diem toi han cua ham so:

$$[-1 - \sqrt{2}, 0, \sqrt{2} - 1, 1]$$

Nếu chỉ xét trên đoạn $[-1;1]$, ta có các điểm tới hạn:

```
> with(Student[Calculus1]):  
f:=(x+1)/(x^2-x);  
`Cac diem toi han cua ham so:`;  
CriticalPoints( f,x=-1..1 );
```

$$f := \frac{x+1}{x^2-x}$$

Cac diem toi han cua ham so:

$$[0, \sqrt{2} - 1, 1]$$

3) Điểm uốn của đồ thị hàm số.

Cú pháp:

```
> InflectionPoints( f,x,opts );  
> InflectionPoints( f,x=a..b,opts );  
> InflectionPoints( f,a..b,opts );
```

Trong đó: - f: là hàm số biến số x;
 - a..b: là khoảng chứa điểm uốn;

- opts: là numeric. Nếu có khai báo numeric (**true**) thì [a..b]=[-10..10], nếu không khai báo maple mặc định là **false**.

Ví dụ: Tìm hoành độ các điểm uốn của đồ thị hàm số $y = f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$.

```
> with(Student[Calculus1]):
f:=x^4-2*x^2+3;`Hoanh do cac diem uon cua do thi ham so:`;
T:=InflectionPoints( f,x):T;
a:=eval(f,x=op(1,T)):b:=eval(f,x=op(2,T)):
`Toa do cac diem uon`;
{(op(1,T),a)},{(op(2,T),b)};
```

$$f := x^4 - 2x^2 + 3$$

Hoanh do cac diem uon cua do thi ham so:

$$\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right]$$

Toa do cac diem uon

$$\left\{ -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{22}{9} \right\}$$

$$\left\{ \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{22}{9} \right\}$$

4) Tiếp tuyến của đồ thị hàm số.

Cú pháp:
> Tangent(f,x=c,a..b,opts);
> Tangent(f,c,a..b,opts);

Trong đó:
 - f: là hàm số biến số x;
 - c: là hoành độ tiếp điểm;
 - a..b là một khoảng chứa c.
 Nếu không khai báo thì Maple sẽ mặc định với khoảng a..b = c-1..c+1.
 - opts là một option ; option ở đây có thể là: **functionoptions**, **output**, **pointoptions**, **showfunction**, **showpoint**, **showtangent**, **tangentoptions**, **title**, **view**.

* **functionoptions**: là một list các thuộc tính (màu /cỡ đồ thị hàm số f, ...) của function; Theo mặc định của Maple, đồ thị hàm f là một đường màu đỏ.

* **output**: là **line**(đường thẳng), **slope**(hệ số góc) hoặc **plot** (đồ thị);

* **pointoptions**: là một list các thuộc tính (màu /hình dạng,...) của điểm; Theo mặc định của Maple, tiếp điểm là một đường tròn màu xanh(blue).

* **showfunction**: được khai báo = **true** hoặc **false**. Nếu **true** thì đồ thị hàm số được vẽ. Mặc định của Maple là **true** khi khai báo showfunction.

* **showpoint**: được khai báo = **true** hoặc **false**. Nếu **true** thì tiếp điểm được vẽ. Mặc định của Maple là **true** khi có khai báo showpoint.

- * **showtangent**: được khai báo = **true** hoặc **false**. Nếu **true** thì tiếp tuyến được vẽ. Mặc định của Maple là **true** khi có khai báo **showtangent**.
- * **tangentoptions**: là một list các thuộc tính (màu /hình dạng,...) của tiếp tuyến; Theo mặc định của Maple, tiếp tuyến là một đường thẳng màu xanh(blue).
- * **title**: là chuỗi kí tự (tiêu đề của hình vẽ). Nếu không khai báo, mặc định của Maple là “The Tangent to the Graph of $f(x) = f(x)$ at the Point $(c, f(c))$ ”.
- * **view**: = [DEFAULT or **a..b**, DEFAULT or **c..d**] , trong đó **a..b** là khoảng giới hạn xem trên trục hoành; **c..d** là khoảng giới hạn xem trên trục tung.

Ví dụ: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x + 1$ tại điểm có hoành độ $x_0 = \frac{1}{2}$.

```
> with(Student[Calculus1]):
f:=x^3-3*x^2+1:
`PT Tiep tuyen`; `y`=Tangent(f,x=1/2);
PT Tiep tuyen
```

$$y = -\frac{9x}{4} + \frac{3}{2}$$

+ Nếu khai báo $x_0 = 0,5$, thì sẽ được kết quả:

```
> f:=x^3-3*x^2+1:
`PT Tiep tuyen`; `y`=Tangent(f,x=0.5);
PT Tiep tuyen
```

$$y = -2.25x + 1.500$$

+ Nếu chỉ muốn tính hệ số góc của tiếp tuyến, ta thực hiện lệnh sau:

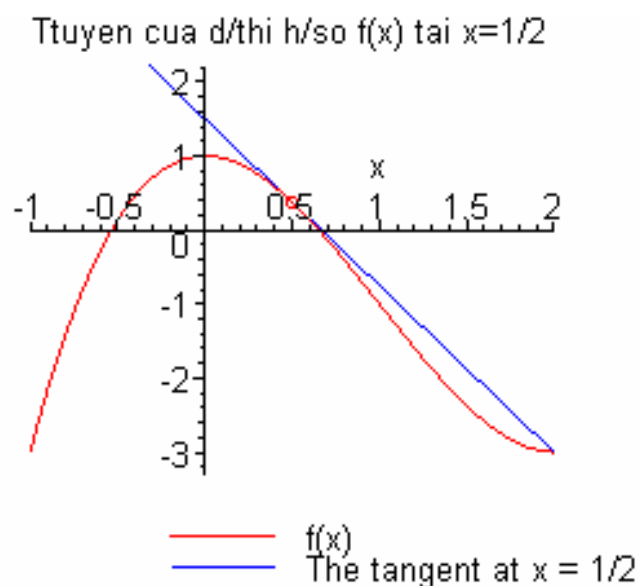
(Khai báo thêm option: output = slope)

```
> with(Student[Calculus1]):
f:=x^3-3*x^2+1:
`He so goc`=Tangent(f,x=1/2,output=slope);
```

$$\text{He so goc} = \frac{-9}{4}$$

+ Nếu muốn vẽ hình, ta thực hiện các lệnh:

```
> with(Student[Calculus1]):
f:=x^3-3*x^2+1:
Tangent(f,x=1/2,output=plot,pointoptions=[color=red],title=
"TTuyen cua d/thi h/so f(x) tai x=1/2",view=[-
1..2,DEFAULT]);
```



5) Đường tiệm cận của đồ thị hàm số.

Cú pháp:

```
> Asymptotes( f,x,y,opts );
> Asymptotes( f,x=a..b,y,opts );
> Asymptotes( f,a..b,y,opts );
```

Trong đó:

- f : là hàm số một ẩn;
- $a..b$ là khoảng xác định của ẩn x (do người dùng khai báo nếu cần);
- y : là tên biến (khai báo cho tiệm cận xiên, ngang,...)

Ví dụ: Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 1}$.

```
> with(Student[Calculus1]):
Tc:=Asymptotes((x^2-3*x+1)/(x-1), x):
`Tiem can xien:=op(1,Tc);
`Tiem can dung:=op(2,Tc);
Tiem can xien: = (y = x - 2)
Tiem can dung: = (x = 1)
```

Ví dụ: Tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số $y = f(x) = \sqrt{x^2 + x}$.

```
> with(Student[Calculus1]):
f:=sqrt(x^2+x);`-----`;
Tcan:=Asymptotes(f, x);
```

$$f := \sqrt{x^2 + x}$$

$$Tcan := \left[y = x + \frac{1}{2}, y = -x - \frac{1}{2} \right]$$

♣ Trường hợp đồ thị hàm số không có tiệm cận thì kết quả là: [] !

Chẳng hạn với đồ thị hàm số $y = x^3 + 1$.

```
> with(Student[Calculus1]):
f:=x^3+1;`-----`;
Tcan:=Asymptotes(f, x);
```

$$f := x^3 + 1$$

$$Tcan := []$$

Ví dụ: Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + x + 1}{2x^2 - x - 1}$ trên khoảng (0;5).

```
> with(Student[Calculus1]):
f:=(x^2+x+1)/(2*x^2-x-1);`-----`;
Tcan:=Asymptotes(f, x=0..5);
```

$$f := \frac{x^2 + x + 1}{2x^2 - x - 1}$$

$$Tcan := \left[y = \frac{1}{2}, x = 1 \right]$$

6) Đường đối xứng của đồ thị hàm số $f(x)$ qua đường thẳng $y = x$.

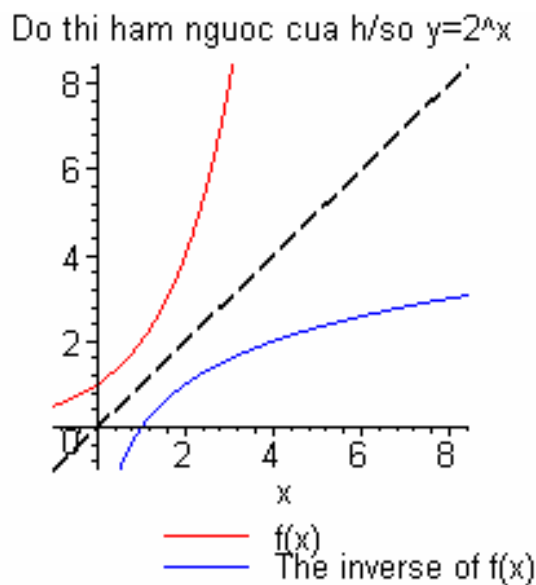
Cú pháp:

```
> InversePlot( f,x,opts );
> InversePlot( f,x=a..b,opts );
> InversePlot( f,a..b,opts );
```

Trong đó: - f: là hàm số một ẩn x;
- a..b là khoảng trên trục hoành cần vẽ đồ thị;
- opts : là các option tương tự như trong lệnh Tangent.

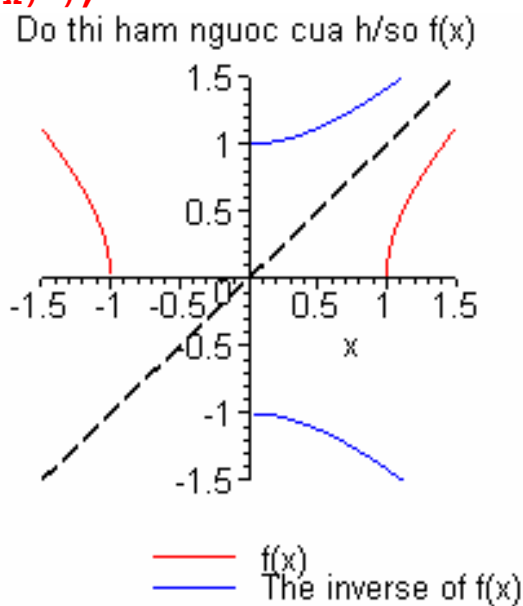
Ví dụ: Vẽ đồ thị hàm số $y = 2^x$ và đường đối xứng của nó qua đường thẳng $y = x$.

```
> with(Student[Calculus1]):
InversePlot(2^x,x=-1..3,
lineoptions=[color=black,thickness=2], title="Do thi ham
nguoc cua h/so y=2^x");
```



Ví dụ: Vẽ đồ thị hàm số ngược của hàm số $y = \sqrt{x^2 - 1}$ trên đoạn $[-1.5; 1.5]$.

```
> with(Student[Calculus1]):  
InversePlot(sqrt(x^2-1), x=-1.5..1.5,  
lineoptions=[color=black,thickness=2], title="Do thi ham  
nguoc cua h/so f(x)");
```



6) Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số.

* Giá trị lớn nhất của hàm số f :

Cú pháp:

```
> maximize( f, x);  
> maximize( f, x=a..b);
```

* Giá trị nhỏ nhất của hàm số f :

Cú pháp: `> minimize(f,x);`
`> minimize(f,x=a..b);`

Trong đó: - a..b là hai điểm mút của một khoảng muốn tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất.

Ví dụ 1:

Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ trên đoạn $[-4;4]$ và $[0;5]$?

(Bài tập 3/tr23_SGK Giải tích 12, Thí điểm , Bộ 2)

+ Nhập biểu thức của hàm số vào Maple:

`> y:=x^3-3*x^2-9*x+35;`
$$y := x^3 - 3x^2 - 9x + 35$$

+ Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-4; 4]$:

`> minimize(y,x=-4..4);`
-41

+ Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-4; 4]$:

`> maximize(y,x=-4..4);`
40

+ Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0; 5]$:

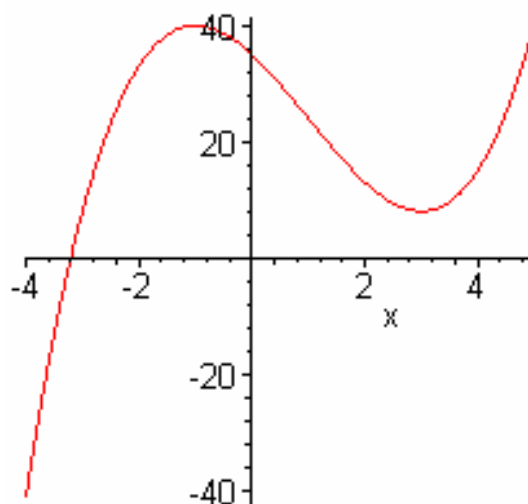
`> minimize(y,x=0..5);`
8

+ Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0; 5]$:

`> maximize(y,x=0..5);`
40

Có thể vẽ đồ thị hàm số trên đoạn $[-4; 5]$ để xem:

`> plot(y,x=-4..5);`



* Muốn biết xem hàm số đạt giá trị nhỏ nhất hay lớn nhất tại điểm nào ta có thể bổ sung thêm từ khóa 'location' trong câu lệnh:

Chẳng hạn:

```
> maximize(y,x=0..5,location);  
40, {[x = 5], 40}
```

Kết quả trên cho biết: $\max_{[0;5]} y = y(5) = 40$.

Còn trên đoạn $[-4;4]$:

```
> maximize(y,x=-4..4,location);  
40, {[x = -1], 40}
```

Kết quả cho ta biết: $\max_{[-4;4]} y = y(-1) = 40$.

Ví dụ 2:

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \frac{2}{x-1}$ với $x > 1$.

(Bài tập 13/tr110_SGK ĐS10 nâng cao)

+ Tìm trong Maple như sau:

```
> minimize(x+2/(x-1),x>1,location);  
2*sqrt(2)+1, {[x = sqrt(2)+1], 2*sqrt(2)+1}
```

Kết quả là $\min_{x>1} \left(x + \frac{2}{x-1} \right) = 2\sqrt{2} + 1$, đạt được tại $x = \sqrt{2} + 1$.

Ví dụ 3:

Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \sqrt{x-1} + \sqrt{4-x}$.

(Bài tập 17/tr112_SGK ĐS 10 nâng cao)

+ Nhận xét: tập xác định của biểu thức là đoạn $[1; 4]$.

```
> A:=sqrt(x-1)+sqrt(4-x);  
'gtnn':=minimize(A,x=1..4,location);  
'gtln':=maximize(A,x=1..4,location);  
A:=sqrt(x-1)+sqrt(4-x)  
gtnn:=sqrt(3), {[x = 1], sqrt(3)}, {[x = 4], sqrt(3)}  
gtln:=sqrt(2)*sqrt(3), {[x = 5/2], sqrt(2)*sqrt(3)}
```

Qua kết quả trên cho ta biết:

- giá trị nhỏ nhất của biểu thức là $\sqrt{3}$ đạt được khi $x = 1$ hoặc $x = 4$;
- giá trị lớn nhất của biểu thức là $\sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{6}$ đạt được khi $x = \frac{5}{2}$.